**ממן 13: אלגוריתמים**

**שאלה 1:**

א. נפריד את p(x) לשני פולינומים המורכבים מהחזקות הזוגיות והאי זוגיות של x, ונקבל:

כך ש:

*נראה את תוצאות הרצת האלגוריתם על שורשי היחידה:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **-i** | **-1** | **i** | **1** |  |
| *-3* | *1* | *-3* | *1* |  |
| *-4* | *-2* | *-4* | *-2* |  |
| *-3+4i* | *3* | *-3-4i* | *-1* | ***P(x)*** |

*ב. נראה את תוצאות ה-INVERSE-FFT על פי תוצאות א:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **-i** | **-1** | **i** | **1** |  |
| *8i* | *-6* | *8i* | *-6* |  |
| *4* | *2* | *4* | *2* |  |
| *-4i* | *-2* | *4i* | *2* |  |
| *4i* | *-8* | *12i* | *-4* | ***P(x)*** |
|  | | | | |

***שאלה 2:***

***שלבי האלגוריתם:***

*תחילה נבצע המרה של המספרים לבסיס בינארי. לאחר מכן, נפעיל את אלגוריתם FFT על שני הפולינומים שאותם אנו רוצים להכפיל, כך נקבל בחירה חכמה של הנקודות המייצגות כל פולינום (כדי לקבל אלגוריתם הפרד-ומשול יעיל לביצוע חישוב הכפל). נכפיל את שני הווקטורים שקיבלנו מהרצת ה-FFT, נפעיל עליהם FFT Inverse – ונקבל את התוצאה של מכפלת שני הפולינומים (בבסיס בינארי). נמיר את התוצאה חזרה מבסיס בינארי וקיבלנו את התוצאה הסופית של הכפלת שני הפולינומים.*

***נכונות:***

*האלגוריתם מתבסס על המרת המספרים לבסיס בינארי, וכמו כן על האלגוריתם להכפלת שני פולינומים באמצעות אלגוריתם FFT. לכן נכונות אלגוריתם זה נובעת מנכונות שני האלגוריתמים הנ"ל.*

***זמן הריצה*** *של הצגת המספרים בבסיס בינארי וחזרה הוא (מתבצע פעמיים – בתחילת האלגוריתם ובסופו). הרצת האלגוריתם FFT על בלוקים בגודל (n/k) היא , עלות ההכפלות היא (נתון) ולכן נקבל . נבחר ונקבל: ועל פי חוקי לוגריתמים:*

לכן סה"כ זמן הריצה הוא: .

***שאלה 3:***

***שלבי האלגוריתם****: חישוב כל הנגזרות של פולינום בנקודה*

*נגדיר שני וקטורים A וB (בהתבסס נוסחת נגזרת לפולינום) :*

*בעזרת וקטורים אלה, נקבל שהנגזרת ה-t היא האיבר ה-n-t של תוצאת הרצת אלגוריתם ה-FFT על A \* B .*

*האלגוריתם יקבל את דרגת הפולינום n, את מקדמי הפולינום ואת הנקודה (נגזרת בנקודה)*

1. *עבור בצע:*
2. *נריץ את אלגוריתם FFT ונשמור את התוצאה ב-d כך שמתקבל*
3. *עבור בצע:*
   1. *הצג כפלט את ערך הנגזרת ה-t בנקודה :*

***נכונות האלגוריתם*** *נובעת מנכונות האלגוריתם להכפלת וקטורים שתוצאתם מציגה את הנגזרת ה k של f .*

***יעילות –*** *יצירת הווקטורים A ו B דורשת זמן ריצה לינארי . להכפלת הווקטורים בעזרת אלגוריתם FFT זמן ריצה של ,ולאחר מכן הצגת הפלט ולכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא .*

***שאלה 4:***

*מימוש ישיר של כפל מטריצות כרוך ב- פעולות אריתמטיות. ביטוי זה נגזר מהעובדה שבכל שלב של הרקורסיה באלגוריתם מפרקים כל מטריצה ל-4 תתי מטריצות מסדר (כלומר 8 קריאות רקורסיביות – פעולות כפל) ו-4 פעולות חיבור (בין כל שני איברים במטריצה). על כן מתקבלת נוסחה לפי שיטת האב לחישוב זמן הריצה של האלגוריתם - . האלגוריתם הנתון שונה מאלגוריתם מימוש ישיר של כפל מטריצות בכך שמספר פעולות הכפל ירד ל7 (במקום 8) – ומספר פעולות החיבור-חיסור גדלו ל-18 (מספר הפעולות שיש ב-P1-P7 ו-s,t,r,u). לכן, אם נשתמש שוב בשיטת האב לחישוב זמן הריצה של האלגוריתם נקבל את הנוסחה: . מה שצריך להוכיח.*